# RACIONÁLNÍ FUNKCE

**Definice:** Racionální funkcí nazýváme podíl dvou nenulových polynomů $P_m / Q_n$ stupňů $m, n$.

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

- $m < n$ ... ryzí racionální funkce
- $m \geq n$ ... neryzí racionální funkce

**Věta:** Každá neryzí racionální funkce je buď polynom nebo se dá vyjádřit jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

Př: $$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2} = \underbrace{2x + 1}_{\text{polynom}} - \underbrace{\frac{4x+1}{x^2+2}}_{\text{ryzí rac. fce}}$$

$$(2x^3 + x^2 + 1) : (x^2 + 2) = 2x + 1$$
$$\frac{-(2x^3 + 4x)}{x^2 - 4x + 1}$$
$$\frac{-(x^2 \quad + 1)}{-4x - 1}$$

## Znaménko racionální funkce

**Věta:** Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = P_m(x) / Q_n(x)$, kde polynomy $P_m(x)$, $Q_n(x)$ nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele.

Př: $$f(x) = \frac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}$$

| + | $-2$ | − | $0$ | − | $1$ | + | $5$ | + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ✓ | | x | | ✓ | | x | |

$$f(2) = \frac{4 \cdot (-3)^2 \cdot 9}{2^4 \cdot 1^3} = \left| \frac{+\ +\ +}{+\ +} \right| > 0$$

Př: 1, $$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x(x-2)^2}{(x-3)^2}$$

| − | $0$ | + | $2$ | + | $3$ | + |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ✓ | | x | | x | |

$$f(1) = \frac{1-4+4}{1-6+9} = \frac{1}{4} > 0$$

2, $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

| − | $-1$ | − | $1$ | + |
|---|---|---|---|---|
| | x | | ✓ | |

$$f(0) = \frac{-1}{1} = -1 < 0$$

# ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

**Věta:** Každou ryzí racionální funkci $P_m(x)/Q_n(x)$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.

- V rozkladu $Q_n$ je $(ex+d)^k$, $e \neq 0$, pak v rozkladu racionální funkce $P_m/Q_n$ je součet $k$ parciálních zlomků:

$$\frac{C_1}{ex+d} + \frac{C_2}{(ex+d)^2} + \dots + \frac{C_k}{(ex+d)^k}.$$

- V rozkladu $Q_n$ je $(ax^2+bx+c)^l$, $a \neq 0$, $D<0$, pak v rozkladu racionální funkce $P_m/Q_n$ je součet $l$ parciálních zlomků:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_lx+B_l}{(ax^2+bx+c)^l}.$$

Postup:
1, Je $P_m(x)/Q_n(x)$ ryzí racionální funkce?
 - pokud není, vydělíme.
2, Rozklad jmenovatele $Q_n(x)$ na součin kořenových činitelů.
3, Obecný tvar rozkladu.
4, Výpočet konstant.

Př: Obecný tvar rozkladu

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3} + \frac{Ex+G}{x^2+x+1} + \frac{Hx+J}{x^2+1} + \frac{Kx+L}{(x^2+1)^2}$$

Př: Určete rozklad racionální funkce na parciální zlomky.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x-6} = 1 + \frac{7-x}{x^2+x-6} = \underline{\underline{1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}}}$$

1, $(x^2+1):(x^2+x-6) = 1$
$\underline{-(x^2+x-6)}$
$-x+7$

2, $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$

3, $$\frac{7-x}{x^2+x-6} = \frac{7-x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

4, $$\frac{7-x}{x^2+x-6} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \quad / \cdot (x-2)(x+3)$$

$$7-x = Ax+3A+Bx-2B$$

$x^1$: $-1 = A+B$ $\quad /2$ $\quad \Rightarrow \quad B = -1-A$
$x^0$: $\underline{7 = 3A-2B}$ $\quad +$ $\quad \underline{\underline{B=-2}}$
$5 = 5A \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A=1}}$

Pozn.: II. způsob výpočtu konstant

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}=\frac{x+1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}\qquad /\cdot(x+2)(x-1)$$

$$x+1=A(x-1)+B(x+2)$$

$$\begin{array}{lll} x=-2: & -1=A\cdot(-3)+B\cdot 0 & \Rightarrow\quad A=\frac{1}{3}\\ x=1: & 2=A\cdot 0+B\cdot 3 & \Rightarrow\quad B=\frac{2}{3}\end{array}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}$$

Př: 1) $$f(x)=\frac{x^4+2x}{x^3+3x^2+3x+1}=x-3+\frac{6x^2+10x+3}{(x+1)^3}=x-3+\frac{6}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$$

$$\begin{array}{l}(x^4+2x):(x^3+3x^2+3x+1)=x-3\\ -(x^4+3x^3+3x^2+x)\\ \quad -3x^3-3x^2+x\\ \quad -(-3x^3-9x^2-9x-3)\\ \qquad 6x^2+10x+3\end{array}$$

$$\frac{6x^2+10x+3}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

$$6x^2+10x+3=Ax^2+2Ax+A+Bx+B+C$$

$$\begin{array}{lll} x^2: & 6=A & \\ x^1: & 10=2A+B & \Rightarrow\quad B=10-2A=-2\\ x^0: & 3=A+B+C & \Rightarrow\quad C=3-A-B=-1\end{array}$$

2) $$f(x)=\frac{x^3-2}{x^4+x^3+x^2}=\frac{x^3-2}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{x}{x^2+x+1}$$

$$x^3-2=Ax^3+Ax^2+Ax+Bx^2+Bx+B+Cx^3+Dx^2$$

$$\begin{array}{lll} x^3: & 1=A\phantom{{}+B}+C & \Rightarrow\quad C=1-A=-1\\ x^2: & 0=A+B\phantom{{}+C}+D & \Rightarrow\quad D=-A-B=-2+2=0\\ x^1: & 0=A+B & \Rightarrow\quad A=-B=2\\ x^0: & -2=B & \end{array}$$

3) $f(x)=\frac{1}{x^4+x^3+x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\underline{\underline{\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)}}}$

$x^4+x^3+x^2+x=x(x^3+x^2+x+1)=x\left[x^2(x+1)+(x+1)\right]=x(x+1)(x^2+1)$

$1=A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x+1)$

$1=Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3+Bx+Cx^3+Cx^2+Dx^2+Dx$

$$\begin{array}{ll} x^3: & 0=A+B+C \\ x^2: & 0=A+C+D \\ x^1: & 0=A+B+D \\ x^0: & \underline{1=A} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B+C=-1 \\ -\begin{cases} C+D=-1 \\ \underline{B+D=-1} \end{cases} \Rightarrow D=-1-B=-\frac{1}{2} \\ +\begin{cases} B+C=-1 \\ \underline{B-C=0} \end{cases} \Rightarrow C=B=-\frac{1}{2} \\ 2B=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \end{array}$$