

RACIONÁLNÍ FUNKCE

Definice: Racionální funkce nazýváme podíl dvou nerutových polynomů P_m / Q_n stupňů m, n .

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

- $m < n \dots$ ryzi racionální funkce
- $m \geq n \dots$ neryzi racionální funkce

Věta: Každá neryzi racionální funkce je buď polynom nebo se dá vyjádřit jako součet polynomu a ryzi racionální funkce.

Pr: $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2} = \underbrace{2x + 1}_{\text{polynom}} - \frac{4x + 1}{x^2 + 2}$ ryzi rac. kec

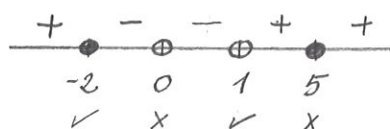
$$(2x^3 + x^2 + 1) : (x^2 + 2) = 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} (2x^3 + x^2 + 1) \\ -(2x^3 + 4x) \\ \hline x^2 - 4x + 1 \\ -(x^2 + 1) \\ \hline -4x - 1 \end{array}$$

Znaménko racionální funkce

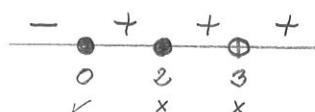
Věta: Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = P_m(x) / Q_n(x)$, kde polynomy $P_m(x), Q_n(x)$ nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele.

Pr: $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}$



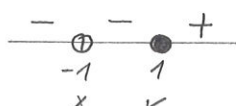
$$f(2) = \frac{4 \cdot (-3)^2 \cdot 9}{2^4 \cdot 1^3} = \frac{+ + +}{+ +} > 0$$

Pr: 1) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x(x-2)^2}{(x-3)^2}$



$$f(1) = \frac{1 - 4 + 4}{1 - 6 + 9} = \frac{1}{4} > 0$$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$



$$f(0) = \frac{-1}{1} = -1 < 0$$

ROZKLAD NA PARCIAĽNÉ ZLOMKY

Věta: Každou ryzi' racionální' funkci $P_m(x)/Q_n(x)$ lze rozložit na součet parciaĽních zlomků.

- V rozkladu Q_n je $(ex+d)^k$, $e \neq 0$, pak v rozkladu racionální' funkce P_m/Q_n je součet k parciaĽních zlomků:

$$\frac{C_1}{ex+d} + \frac{C_2}{(ex+d)^2} + \dots + \frac{C_k}{(ex+d)^k}$$

- V rozkladu Q_n je $(ax^2+bx+c)^l$, $a \neq 0$, $D < 0$, pak v rozkladu racionální' funkce P_m/Q_n je součet l parciaĽních zlomků:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_lx+B_l}{(ax^2+bx+c)^l}$$

Postup: 1, Je $P_m(x)/Q_n(x)$ ryzi' racionální' funkce?
- pokud ne, vydělíme.

2, Rozklad jmenovatele $Q_n(x)$ na součin kořenových činitelů.

3, Obecný tvar rozkladu.

4, Výpočet konstant.

Př: Obecný tvar rozkladu

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3} + \frac{Ex+G}{x^2+x+1} + \frac{Hx+J}{x^2+1} + \frac{Kx+L}{(x^2+1)^2}$$

Př: Určete rozklad racionální' funkce na parciaĽní zlomky.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x-6} = 1 + \frac{4-x}{x^2+x-6} = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}$$

$$1) \begin{array}{r} (x^2+1) : (x^2+x-6) = 1 \\ -(x^2+x-6) \\ \hline -x+7 \end{array}$$

$$2) x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

$$3) \frac{4-x}{x^2+x-6} = \frac{4-x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$4) \frac{4-x}{x^2+x-6} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \quad | \cdot (x-2)(x+3)$$

$$4-x = Ax + 3A + Bx - 2B$$

$$x^1: -1 = A + B \quad \begin{array}{l} 137 \\ \downarrow \end{array} \Rightarrow B = -1 - A$$

$$x^0: 4 = 3A - 2B \quad \Rightarrow B = -2$$

$$5 = 5A \Rightarrow A = 1$$

Pozn.: II. způsob ryšově konstant

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \quad | \cdot (x+2)(x-1)$$

$$x+1 = A(x-1) + B(x+2)$$

$$x = -2: \quad -1 = A \cdot (-3) + B \cdot 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x = 1: \quad 2 = A \cdot 0 + B \cdot 3 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$\underline{f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-1)}}$$

$$\text{Př. 1) } f(x) = \frac{x^4+2x}{x^3+3x^2+3x+1} = x-3 + \frac{6x^2+10x+3}{(x+1)^3} = \underline{x-3 + \frac{6}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}}$$

$$(x^4+2x) : (x^3+3x^2+3x+1) = x-3$$

$$-(x^4+3x^3+3x^2+x)$$

$$-3x^3-3x^2+x$$

$$-(-3x^3-9x^2-9x-3)$$

$$6x^2+10x+3$$

$$\frac{6x^2+10x+3}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$6x^2+10x+3 = Ax^2+2Ax+A+Bx+B+C$$

$$x^2: \quad 6 = A$$

$$x^1: \quad 10 = 2A + B \Rightarrow B = 10 - 2A = -2$$

$$x^0: \quad 3 = A + B + C \Rightarrow C = 3 - A - B = -1$$

$$2) f(x) = \frac{x^3-2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{x^3-2}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \underline{\underline{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{x}{x^2+x+1}}}$$

$$x^3-2 = Ax^3+Ax^2+Ax+Bx^2+Bx+B+Cx^3+Dx^2$$

$$x^3: \quad 1 = A + C \Rightarrow C = 1 - A = -1$$

$$x^2: \quad 0 = A + B + D \Rightarrow D = -A - B = -2 + 2 = 0$$

$$x^1: \quad 0 = A + B \Rightarrow A = -B = 2$$

$$x^0: \quad -2 = B$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x^4 + x^3 + x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x^3 + x^2 + x + 1) = x[x^2(x+1) + (x+1)] = x(x+1)(x^2+1)$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 + Dx$$

$$x^3: 0 = A + B + C$$

$$x^2: 0 = A + C + D$$

$$x^1: 0 = A + B + D$$

$$x^0: 1 = A$$

$$\begin{aligned} B+C &= -1 \\ - \begin{cases} C+D &= -1 \\ B+D &= -1 \end{cases} &\Rightarrow D = -1 - B = -\frac{1}{2} \\ + \begin{cases} B+C &= -1 \\ B-C &= 0 \end{cases} &\Rightarrow C = B = -\frac{1}{2} \\ 2B &= -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$